$1^{\text{ère}}$ Maths CS5 du 5 Avril 2024 50 min **Thiaude P.**
Calculatrice en mode Examen

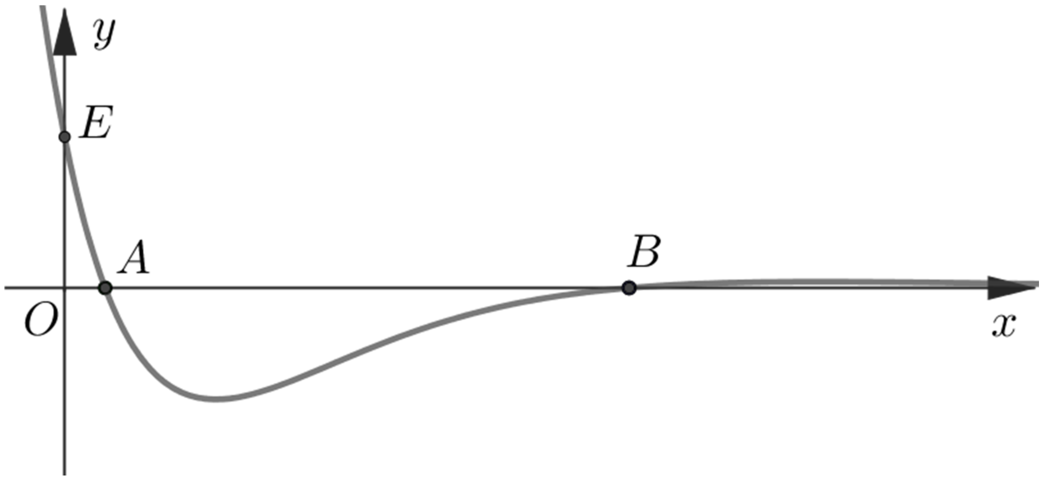
<u>Exercice 1</u> [3 pts]
Donner l'ensemble S des solutions de l'inéquation d'inconnue réelle x :

$$e^{-x+5} \times e^{7x+1} < 1$$

<u>Exercice 2</u> [5 pts]
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2e^{2x} + 5e^{x} - 7 = 0$.

<u>Exercice 3</u> [4 pts]
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = (e^{x} + e^{-x})^2 - (e^{x} - e^{-x})^2$.
1. Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
2. Démontrer qu'il existe une constante k, à préciser, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = k$.

<u>Exercice 4</u> [8 pts : 2 pts + 2 pts + 2 pts + 2 pts]
On munit le plan d'un repère orthonormé, Γ est la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4x + a)e^{-x}$ où a est une constante réelle provisoirement inconnue.
La courbe Γ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B avec $x_A = 2 - \sqrt{3}$:



1. Déterminer la valeur de a.

Dans toute la suite de l'exercice on admet que : $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}}$.

2. Déterminer les coordonnées de B.

3. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f.

4. On note E le point de Γ d'abscisse nulle et d la tangente à Γ en E.

- **a.** Déterminer l'équation réduite de la tangente d.
- **b.** Le point A appartient-t-il à la tangente d ?

<u>BONUS</u> [1 point]
Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$e^{3x} - \left(1 + e + \frac{1}{e}\right)e^{2x} + \left(1 + e + \frac{1}{e}\right)e^{x} - 1 = 0$$

Corrigé

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{-x+5} \times e^{7x+1} < 1$

On a les équivalences :

$$e^{-x+5} \times e^{7x+1} < 1 \Leftrightarrow e^{(-x+5)+(7x+1)} < e^0 \Leftrightarrow e^{-x+5+7x+1} < e^0 \Leftrightarrow e^{6x+6} < e^0 \Leftrightarrow 6x+6<0$$
$$\Leftrightarrow 6x < -6 \Leftrightarrow x < -1$$

L'inéquation se départ admet pour ensemble des solutions : $\boldsymbol{S =]-\infty; -1[}$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ équation : $\boldsymbol{2e^{2x} + 5e^x - 7 = 0}$.

On a l'équivalence : $2e^{2x} + 5e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 5e^x - 7 = 0$.

En posant $X = e^x$, cette équation s'écrit : $2X^2 + 5X - 7 = 0$.

$2X^2 + 5X - 7$ est de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a = 2$, $b = 5$ et $c = -7$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(2)(-7) = 25 + 56 = 81$$

$\Delta > 0$ donc $2X^2 + 5X - 7$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{81}}{2(2)} = \frac{-5-9}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$$
$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{81}}{2(2)} = \frac{-5+9}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

On a donc : $X = -\frac{7}{2}$ ou $X = 1$, or $X = e^x$ donc :

$$e^x = -\frac{7}{2} \quad ou \quad e^x = 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc l'équation $e^x = -\frac{7}{2}$ n'a pas de solution réelle.	$e^x = 1$ $\Leftrightarrow e^x = e^0$ $\Leftrightarrow x = 0$

L'équation de départ admet pour unique solution : 0.

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$.

1. **Calculer : $\boldsymbol{g(0) = 4}$ et $\boldsymbol{g(1)}$.**

$g(0) = (e^0 + e^{-0})^2 - (e^0 - e^{-0})^2 = (1+1)^2 - (1-1)^2 = 2^2 - 0^2 = 4$

On a donc : $\boldsymbol{g(0) = 4}$.

D'autre part :

$$g(1) = (e^1 + e^{-1})^2 - (e^1 - e^{-1})^2 = \left(e + \frac{1}{e}\right)^2 - \left(e - \frac{1}{e}\right)^2$$
$$= e^2 + 2 \times e \times \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2 - \left(e^2 - 2 \times e \times \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2\right) = e^2 + 2 + \frac{1}{e^2} - \left(e^2 - 2 + \frac{1}{e^2}\right)$$
$$= e^2 + 2 + \frac{1}{e^2} - e^2 + 2 - \frac{1}{e^2} = 4$$

On a donc : $\boldsymbol{g(1) = 4}$.

2. **Démontrer que : $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 4}$.**

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2 - [(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2]$$
$$= e^{2x} + 2e^{x+(-x)} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^{x+(-x)} + e^{-2x}) = e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})$$
$$= e^{2x} + 2 \times 1 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 \times 1 + e^{-2x}) = e^{2x} + 2 + e^{-2x} - 2e^{2x} + 2 - e^{-2x} = 4$$

On a donc bien : $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 4}$.

Autre méthode

$$g(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = [(e^x + e^{-x}) + (e^x - e^{-x})] \times [(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]$$
$$= (e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}) = 2e^x \times 2e^{-x} = 4e^x e^{-x} = 4e^{x+(-x)} = 4e^0 = 4 \times 1 = 4$$

Exercice 4

Repère orthogonal, Γ courbe de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4x + a)e^{-x}$.

1. **$A(2+\sqrt{3}\,;0)$ est un point d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses : en déduire la valeur de a.**

   $A \in \Gamma$ revient à dire que $y_A = f(x_A)$.

   Ce qui donne :

$$\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + a\right)e^{-(2+\sqrt{3})} = 0 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^2 - 4\left(2+\sqrt{3}\right) + a = 0$$
$$\Leftrightarrow 4 + 4\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 8 - 4\sqrt{3} + a = 0 \Leftrightarrow 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + a = 0$$
$$\Leftrightarrow -1 + a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

   On a donc : $\boldsymbol{a = 1}$.

   On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$.

Pour toute la suite de l'exercice on a admet que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$.

2. **Γ coupe l'axe des abscisses en $A(2+\sqrt{3}; 0)$ et en B : déterminer les coordonnées B**

   Il s'agit de déterminer $x \neq x_A$ tel que $f(x) = 0$.

   On a les équivalences :

$$(x^2 - 4x + 1)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x)^2 - 2(x)(2) + 2^2 - 4 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - 2 + \sqrt{3}\right)\left(x - 2 - \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{3} \;\; ou \;\; x = 2 + \sqrt{3}$$

   Or, $x_A = 2 - \sqrt{3}$ et $x \neq x_A$ donc : $x_B = 2 + \sqrt{3}$.

   Finalement : $\boldsymbol{B(2+\sqrt{3}; 0)}$.

3. **• calcul de $f'(x)$**

   $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$

   Rappel : $(u \times v)' = u' \times v + v' \times u \quad (e^{-x})' = -e^{-x}$

   $f'(x) = (2x - 4)e^{-x} + (-e^{-x})(x^2 - 4x + 1)$

   $f'(x) = \left(2x - 4 - (x^2 - 4x + 1)\right)e^{-x}$

   $f'(x) = (2x - 4 - x^2 + 4x - 1)e^{-x}$

   $f'(x) = (-x^2 + 6x - 5)e^{-x}$

   $\forall x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{f'(x) = (-x^2 + 6x - 5)e^{-x}}$.

   • signe de $f'(x)$, tableau de variation de f

   Pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2 + 6x - 5$, qui est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 6$ et $c = -5$, de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-1)(-5) = 36 - 20 = 16$$

   $\Delta > 0$ donc $-x^2 + 6x - 5$ admet deux racines réelles distinctes :

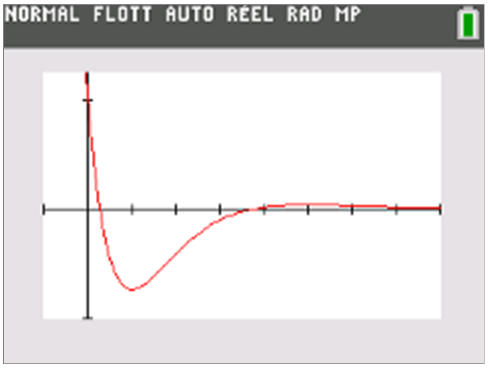
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6 - 4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-6 + 4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

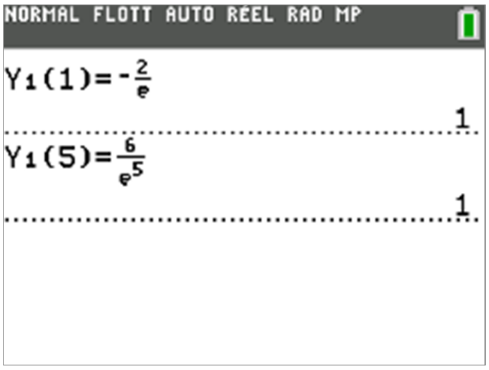
   Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines ».

$$f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^{-x}$$
$$f(1) = (1^2 - 4(1) + 1)e^{-1} = (1 - 4 + 1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$$
$$f(5) = (5^2 - 4(5) + 1)e^{-5} = (25 - 20 + 1)e^{-5} = 6e^{-5}$$

   On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Sens de variation de f		$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^5}$	$\searrow$	

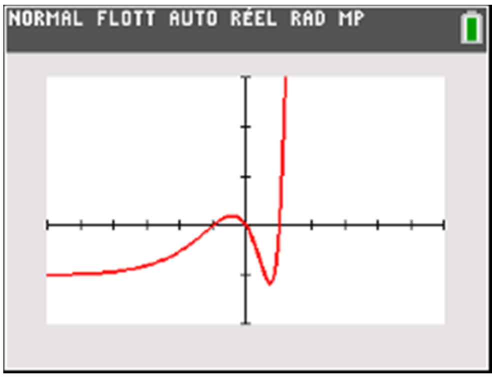




<u>BONUS</u>
Résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$e^{3x}-\left(1+e+\frac{1}{e}\right)e^{2x}+\left(1+e+\frac{1}{e}\right)e^{x}-1=0$$

Cette équation est de la forme $f(x)=0$, en visualisant sur l'écran la courbe représentative de f on obtient :



On peut conjecturer que l'équation de départ admet pour solutions dans $\mathbb{R}$: -1, 0 et 1.

On a l'équivalence :

$$e^{3x}-\left(1+e+\frac{1}{e}\right)e^{2x}+\left(1+e+\frac{1}{e}\right)e^{x}-1=0$$
$$\Leftrightarrow (e^{x})^3-\left(1+e+\frac{1}{e}\right)(e^{x})^2+\left(1+e+\frac{1}{e}\right)e^{x}-1=0$$

En posant $X=e^{x}$, cette équation s'écrit : $X^3-\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X^2+\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X-1=0$.
Or, 1 est une solution évidente donc on peut chercher une factorisation du membre de droite par $(X-1)$, puis en raisonnant directement sur le terme de plus haut degré et sur le terme constant, on peut conjecturer l'existence d'une constante b telle que :

$$\forall X\in\mathbb{R}, X^3-\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X^2+\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X-1=(X-1)(X^2+bX+1)$$

Le terme en X du membre de droite est $(1-b)X$ et celui du membre de droite est $\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X$ donc :
$1-b=1+e+\frac{1}{e}$ autrement dit : $b=-e-\frac{1}{e}$. Donc, d'après notre conjecture, pour tout $X\in\mathbb{R}$:

$$X^3-\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X^2+\left(1+e+\frac{1}{e}\right)X-1=(X-1)\left(X^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)X+1\right)$$

On peut confirmer cette identité en développant le membre de droite.
L'équation en X s'écrit donc :

$$(X-1)\left(X^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)X+1\right)=0 \Leftrightarrow X-1=0\ \ ou\ X^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)X+1=0$$

$X^2-\left(e+\frac{1}{e}\right)X+1$ est de la forme aX^2+bX+c avec $a=1, b=e+\frac{1}{e}$ et $c=1$, de discriminant :

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-\left(e+\frac{1}{e}\right)\right)^2-4(1)(1)=\left(e+\frac{1}{e}\right)^2-4=e^2+2e\times\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}\right)^2-4$$

$$= e^2 + 2 - 4 + \left(\frac{1}{e}\right)^2 = e^2 - 2 + \left(\frac{1}{e}\right)^2 = e^2 - 2e \times \frac{1}{e} + \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \left(e - \frac{1}{e}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc $X^2 - \left(e + \frac{1}{e}\right)X + 1$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e + \frac{1}{e} - \left(e - \frac{1}{e}\right)}{2(1)} = \frac{2 \times \frac{1}{e}}{2} = \frac{1}{e}$$

$$X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{e + \frac{1}{e} + \left(e - \frac{1}{e}\right)}{2(1)} = \frac{2 \times e}{2} = e$$

On a donc : $X = 1 \;\; ou \;\; X = \frac{1}{e} \;\; ou \;\; X = e$ autrement dit : $X = e^0 \;\; ou \;\; X = e^{-1} \;\; ou \;\; X = e^1$

Or $X = e^x$ donc : $e^x = e^0 \; ou \;\; e^x = e^{-1} \;\; ou \; e^x = e^1$soit finalement : $x = 0 \;\; ou \;\; x = -1 \;\; ou \;\; x = 1$.

L'équation de départ admet pour donc pour solutions dans $\mathbb{R}$: $\mathbf{-1, 0}$ et $\mathbf{1}$.

Autrement dit : $S = \{-1\,;0\,;1\}$.

On retrouve comme solutions celles énoncées dans la conjecture initiale…